Korrespondenz-Prinzip

Da in QM die Wellenfkt bzw die Operatoren auf einem Hilbertraum die Hauptrolle spielen (statt klassische Observablen) gilt das Korrespondenz-Prinzip, ~~...~~ also ~~...~~ klass. Größen mit Diff. op vertauschen

$$p \to -i\hbar \partial/\partial x \qquad E \to i\hbar \partial/\partial t$$

klassische Dispersionsrelation

z.B. $$E\Psi = \left(\frac{p^2}{2m} + V\right)\Psi \qquad \left(E = \frac{p^2}{2m} + V\right)$$

$$\to \quad i\hbar \partial/\partial t\, \Psi = \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V\right)\Psi$$

oder rel. Dispersionsrelation

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\Rightarrow \quad E^2\Psi = (p^2c^2 + m^2c^4)\Psi$$

$$(i\hbar \partial/\partial t)^2 \Psi = (-\hbar^2c^2\Delta + m^2c^4)\Psi$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = (-\hbar^2c^2\Delta + m^2c^4)\Psi$$

oder auf gekrümmten RZ.

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \underbrace{- \hbar^2c^2\Delta_g + m^2 + \xi R_g}_{K_g}\Big)\phi = 0$$

Δ_g - Laplace Beltrami operator auf Mannigfaltigkeit (Σ, g)

Much, Oeckl (18):

Thm: K_g ist ein selbst-adjungierter Operator auf $D(K_g) \subset L^2(\Sigma)$

Hermitische - selbst-adjungierte Operatoren

$$\langle A\phi, \phi\rangle = \lambda^* \langle \phi, \phi\rangle$$

$$\langle A\phi, \phi\rangle = \langle \phi, A\phi\rangle = \cancel{\lambda\langle\phi,\phi\rangle}$$

$$= \lambda \langle \phi, \text{[redacted]} \phi\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \lambda^*$$

Eigenwerte eines hermitischen operators sind reel!

WRONG!

Bei beschränkten operatoren Ja bei unbeschränkten Nein!

Hellinger Toeplitz Thm:

Ein operator A der $(A\varphi, \Psi) = (\varphi, A\Psi)$ auf ganz $\mathcal{H}$ erfüllt ist notwendigerweise beschränkt.

Beschränkter Operator $A: X \to Y$

$\|A\Psi\|_Y \leq C\|\Psi\|_X$ für $C < \infty$, $\Psi \in X$

Sprich unbeschränkter Operator muss auf einer dichten Teilmenge von $\mathcal{H}$ definiert sein.

$A: D(A) \to \mathcal{H}$

Domain von A

Beispiel: ·) $(\hat{X}\varphi)(x) = x\,\varphi(x)$

·) $T\Psi = -\Psi'' + x^2\Psi(x)$

$T\Psi_n = (2n+1)\,\Psi_n(x)$

Definition

Symmetrisch (Hermitisch)

$(A\Psi, \varphi) = (\Psi, A\varphi) \quad \forall\, \Psi, \varphi \in D(A)$

$\cancel{(A\Psi, \varphi) = (\Psi, A\varphi) \quad \forall \Psi \in D(A) \quad \forall \varphi \in D(A^*)}$

<u>Def.</u> :

Sei T dicht definierter Operator auf $\mathcal{H}$.

Sei $D(T^*)$ die Menge $\varphi \in \mathcal{H}$ für die ein $\eta \in \mathcal{H}$ existiert mit

$$(T\psi, \varphi) = (\psi, \eta) \qquad \forall \psi \in D(T)$$

Für jedes solche φ, definieren wir $T^* \varphi = \eta$.

T^* adjungierte von T.

Wenn $D(T^*) = D(T)$, $T = T^*$

$\Rightarrow$ T selbst-adjungiert.

<u>Beispiel:</u> $P = -i \partial/\partial x$

$$D(P) = \{ \varphi \in L^2(0,1) : P\varphi \in L^2, \; \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \}$$

$$\langle \varphi, P\psi \rangle = \int_0^1 \bar{\varphi}\, i\partial_x \psi \, dx$$

$$= i \Big| \bar{\varphi}(x)\psi(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \overline{-i\partial_x \varphi}(x)\, \psi(x)$$

$$= i \underbrace{\bar{\varphi}(1)\psi(1)}_{=0} - i \underbrace{\bar{\varphi}(0)}_{=0} \psi(0) + \langle P\varphi, \psi \rangle$$

$$= \langle P\varphi, \psi \rangle$$

$D(P^*) = \{\varphi \in L^2(0,1) : P\varphi \in L^2\}$

~~[illegible]~~

$\langle P\psi, \varphi\rangle = \int_0^1 \overline{P\varphi}\, \psi \, dx = \int_0^1 \overline{-i\partial_x \varphi}(x)\, \psi(x)$

$= i(\underbrace{\overline{\varphi}(1)}_{=0}\psi(1) - \underbrace{\overline{\varphi}(0)}_{=0}\psi(0))$

$+ \langle \psi, P\varphi\rangle$

$= \langle \psi, P\varphi\rangle$

<u>Ausweg</u>

$D(P) = \{\varphi \in L^2(0,1) : P\varphi \in L^2,\ \varphi(0) = \varphi(1)\}$

symmetrisch ✓ (Einfach zu überprüfen
ÜBERPRÜFE!)

$D(P^*)$?

$\langle P\psi, \varphi\rangle = i(\overline{\varphi}(1)\psi(1) - \overline{\varphi}(0)\psi(0))$

$+ \langle \psi, P\varphi\rangle$

$= i\overline{\varphi}(1)(\psi(1) - \psi(0))$

$+ \langle \psi, P\varphi\rangle$

$\Rightarrow \psi(1) = \psi(0)$

$D(P^*) = \{\varphi \in L^2(0,1) : P\varphi \in L^2,\ \psi(0) = \psi(1)\}$

$= D(P)$

2.1

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t,\vec{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} \Psi(\vec{x},t) + U(t,\vec{x})\,\Psi(\vec{x},t)$$

$$\langle \vec{p} \rangle_t := \int \overline{\Psi(t,\vec{x})}\ \frac{\hbar}{i}\ \vec{\nabla}_x \Psi(t,\vec{x})\, d^3x$$

$$\langle \vec{F} \rangle_t := \int |\Psi(t,\vec{x})|^2\ \vec{\nabla}_x U(t,x)\ d^3x$$

2.2.

$$\langle \vec{F} \rangle_t = \frac{d}{dt} \langle \vec{p} \rangle_t$$

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{p} \rangle_t = \int \frac{d}{dt}\overline{\Psi(t,\vec{x})}\ (-i\hbar)\ \vec{\nabla}_x \Psi(\vec{x},t)\ d^3x$$

$$+ \int \overline{\Psi}(t,\vec{x}) \left(-i\hbar \frac{d}{dt}\vec{\nabla}_x \Psi(\vec{x},t)\right) d^3x$$

$$= \int \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m}\overline{\Psi} + U\overline{\Psi}\right) \vec{\nabla}_x \Psi(\vec{x},t)\ d^3x$$

$$- \int \overline{\Psi}(t,\vec{x})\ \vec{\nabla}_x \left(\frac{\hbar^2 \Delta}{2m}\Psi + U\Psi\right)\ d^3x$$

$$\cancel{= \int U \overline{\Psi}\, \vec{\nabla}_x \Psi(\vec{x},t) +}$$

$$= -\int \overline{\Psi}(t,\vec{x}) (\vec{\nabla}_x U)\, \Psi(t,\vec{x})\ d^3x$$

3.2

$$[A,B] = AB - BA$$

$$(P_j \chi)(\vec{x}) = -i\hbar \, \partial/\partial x_j \, \chi(\vec{x}) \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$$

$$(X_j \chi)(\vec{x}) = x_j \, \chi(\vec{x})$$

(A)

1) $[A,B] = AB - BA$

$$-[B,A] = -(BA - AB) = AB - BA$$

2) $[A,BC] = B[A,C] + [A,B]C$

LS:

$$[A,BC] = ABC - BCA$$

RS:

$$B(AC - CA) + (AB - BA)C$$

$$= BAC - BCA + ABC - BAC = ABC - BCA \checkmark \quad \square$$

3) Jacobi- Identität

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

$$(A(BC - CB) - (BC - CB)A) + (B(CA - AC) - (CA - AC)B)$$

$$+ (C(AB - BA) - (AB - BA)C$$

$$= ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC$$

$$- CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC$$

$$= 0$$

Überprüfen wir dass $[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}\mathbb{1}$ die Jacobi-identität erfüllt.

$$\underbrace{[X_i, \underbrace{[X_j, P_k]}_{i\hbar\delta_{jk}\mathbb{1}}]}_{=0} + \underbrace{[X_j, \underbrace{[P_k, X_i]}_{-i\hbar\delta_{ik}\mathbb{1}}]}_{=0} + \underbrace{[P_k, \underbrace{[X_i, X_j]}_{=0}]}_{=0} = 0$$

(B) z.z.: $[P_i, X_j] = -i\hbar\delta_{ij}$

(I)

$$(P_i X_j \varphi)(\vec{x}) = -i\hbar\partial_i(x_j\varphi(\vec{x}))$$

$$(X_j P_i \varphi)(\vec{x}) = -i\hbar x_j \partial_i \varphi(\vec{x})$$

$$(P_i X_j - X_j P_i)\varphi(\vec{x}) = -i\hbar\partial_i(x_j\varphi(\vec{x})) + i\hbar x_j\partial_i\varphi(\vec{x})$$

$$= -i\hbar\delta_{ij}\varphi(\vec{x}) - i\hbar x_j\partial_i\varphi(\vec{x}) + i\hbar x_j\partial_i\varphi(\vec{x})$$

$$= -i\hbar\delta_{ij}\varphi(\vec{x})$$

(II) $[P_i, U(\vec{x})] = -i\hbar\partial_i U(\vec{x})$

$$(P_i U(\vec{x})\varphi)(\vec{x}) = -i\hbar\partial_i(U(\vec{x})\varphi(\vec{x}))$$

$$U(\vec{x})P_i\varphi(\vec{x}) = -i\hbar U(\vec{x})\partial_i\varphi(\vec{x})$$

$$[P_i, U(\vec{x})]\varphi(\vec{x}) = -i\hbar\Big(\partial_i U(\vec{x})\varphi(\vec{x}) + U(\vec{x})\partial_i\varphi(\vec{x})$$
$$\cancel{+} - U(\vec{x})\partial_i\varphi(\vec{x})\Big)$$

$$= -i\hbar(\partial_i U(\vec{x}))\varphi(\vec{x})$$

(iii) $$[H, X_j] = -i\frac{\hbar}{m} P_j$$

Beachte:

$$i\frac{d}{dt}\hat{A} = [H, \hat{A}] \qquad (\text{in QM})$$

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + U(\hat{\vec{X}}) = \frac{P_i P^i}{2M} + U(\hat{\vec{X}})$$

$$[H, X_j] = \left[\frac{P_i P^i}{2M}, X_j\right] + \underbrace{[U(\vec{X}), X_j]}_{=0}$$

da $[X_i, X_j] = 0$ (in QM)

$$= \frac{1}{2M}[P_i P^i, X_j] \quad \Leftarrow [A, BC] = [A,B]C + B[A,C]$$

$$= \frac{1}{2M}\left[[P_i, X_j]P^i + P_i[P^i, X_j]\right]$$

$$= \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\,\delta_{ij}\,P^i + P_i(-i\hbar)\,\delta^i{}_j\right)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\left(P_j + P_j\right) = -\underline{\underline{\frac{i\hbar}{m}P_j}}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\rho(\vec{x},t) = |\psi(\vec{x},t)|^2$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x},t) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^{*} \psi + \bar{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

aus Schrödinger Gl.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$$

$$-i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\Delta\bar{\psi} + V\bar{\psi}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \vec{x}^2}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \vec{x}^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\cdot\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \vec{x}}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}}\right)$$

$$= \vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{m}\left[(\vec{\nabla}\bar{\psi})\psi - \bar{\psi}(\vec{\nabla}\psi)\right]$$

3.3

$\Psi(\vec{x},t)$ Lsg. der Schrödinger gl. mit Potential $V(\vec{x})$

also Seperationsansatz

$$\Psi(\vec{x},t) = \Psi(\vec{x})\, f(t) = \Psi(\vec{x})\, e^{-i\omega t}$$

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$\rho = |\Psi(\vec{x},t)|^2 = |\Psi(\vec{x})|^2$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left(\bar{\Psi}(t,\vec{x})\, \vec{\nabla}_x \Psi(t,\vec{x})\right)$$

Nun setzen wir den Lsgsansatz. ~~$\Psi(\vec{x},t) = \phi \Psi(\vec{x},t)$~~

$$\Psi(\vec{x},t) = |\Psi(\vec{x},t)|\, e^{i\phi(\vec{x},t)}$$

$$= \sqrt{\rho}\, e^{i\phi(\vec{x},t)}$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m} \rho\, \vec{\nabla}_x \phi(\vec{x},t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{\hbar} \int d\vec{x} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{x},t)}{\rho(\vec{x})} = \phi(\vec{x},t) + C$$

Aus der Kenntnis von $\phi \Rightarrow e^{i\phi(\vec{x},t)} = \frac{\Psi}{|\Psi|} e^{-i\omega t}$

Beispiel Ebene Welle:

$\vec{j} = \frac{\hbar \vec{k}}{m} \in \mathbb{R}^3 \quad \rho = 1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad \phi(\vec{x},t) = \vec{k} \cdot \vec{x} + C \quad \Rightarrow \quad e^{i\phi} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}$

$C = -i\omega t$